ルネサンスの数学

1　ルネサンス（仏独英　Ｒｅｎａｉｓｓａｎｃｅ　伊　Ｒｉｎａｓｃｉｍｅｎｔｏ）

ルネサンスとは，１４世紀から１６世紀にかけて主にイタリアを中心として起こった古典文化を指導理念とする人間性主張の文化運動をいう．一般に，キリスト教会に抑圧されていた中世の暗黒時代を抜け出した光明と文化の時代と考えられている．当時，中世の神学中心の学問より，もっと役に立つ教育を望む声が高まり，まず，過去の古典世界に学ぶ必要性が認識され，古典講読，文法，修辞学，歴史，道徳哲学などのいわゆる「人文学」が重要視された．今までキリスト教徒の読むものではないとされ，教会や修道院の片隅に埋もれていた古代のギリシャ人やローマ人の著作が，人文学者たちによって掘り起こされて陽の目を見るようになった．古代復興といっても古代の単なる復元や模倣ではなく，当時の人々の「見たい，知りたい」という強い探究心と好奇心は，古典的な人文学の枠を超えて，文学，哲学，歴史，演劇，音楽，美術，建築，築城技術，数学，自然科学，医学，政治思想，教育，宗教などあらゆる分野において活発な精神活動を促進し，３世紀にわたる長期間，独創的で実に様々な「作品」が産み出されるという，歴史上まれに見る豊かな時代を演出した．

ルネサンスは，大まかに，３つの時代に区分される．第一期（１４世紀）は，封建制と市民社会の未分化と抗争の見られる時代であり，中心地はフィレンツェ，代表的人物はダンテ，ジョット，ペトラルカ，ボッカッチョ，ヴィラーニなどである．第二期（１５世紀）は，市民社会の確立にともなう古典主義的理想主義が見られ，ルネサンスの安定期である．中心地はフィレンツェであるが，人文学者の活躍と美術における写実主義の定着が見られる．代表的人物は，ブラッチョリーニ，ブルーニ，ブルネレスキ，ギベルティ，ドナテッロ，ウッチェッロ，トスカネッリ，フラ・アンジェリコ，マサッチョ，アルベルティ，ヴァッラ，フィチーノ，ボッティチェッリ，レオナルド・ダ・ヴィンチなどである．第三期（１５世紀末～１６世紀）には，外国勢力の侵入による政治的混乱のため，中心地はフィレンツェを去って，ローマへ，最後にヴェネツィアへと移行する．代表的人物はミケランジェロ，ラファエッロ，カルパッチョ，マキァヴェッリ，ジョルジョーネ，ティツィアーノ，パラディオ，ティントレット，ヴェロネーゼなどである．また，この時期には，イタリアのルネサンス文化はアルプス以北に大きな影響をおよぼし，オランダはエラスムスを生み，ドイツでは，ルター，メランヒトンらが出て宗教改革を引き起こしたが，絶対主義が生成した地域では，市民的感情と宮廷趣味の混合した文化が宮廷の保護の下に成長した．イギリスのトマス・モア，シェークスピア，フランスのモンテーニュ，ラヴレー，スペインのセルバンテスなどはこの傾向を代表する．

2　アラビアの数学

４７６年の西ローマ帝国滅亡以来，西ヨーロッパの学問は低調となったが，東ローマ帝国においては，アテネやアレクサンドリアで，ヘレニズムの延長としての学問的活動が続いていた．５２９年，東ローマ帝国皇帝ユスティニアヌスの命により，アテネのアカデメイアが閉鎖され，多数の学者が，多くの文献を携えペルシアに亡命した．それ以後，数学についても，ヨーロッパにおいては大きな発展はなく，それは東方のアラブ世界において見られることになる．

６４２年，サラセン軍はササン朝ペルシアを倒し，その勢力を急激に拡大して行ったが，７００年頃には東はカーブル，西は北アフリカ大西洋岸に至る一大帝国（サラセン帝国）が形成された．８世紀後半から９世紀にかけてイスラム文化は全盛時代を迎え，首都バグダッドは繁栄を極めた．８３０年，時のカリフ，アル・マームーンはアレクサンドリアのムセイオンに匹敵する研究所「知恵の館」をバグダッドに創設し，ギリシアのあらゆる古典をアラビア語に翻訳させようと試みた．ユークリッドの「幾何学原論」を始めとする多くの数学書がアラビア語に翻訳された．

「知恵の館」の教授として，**アル・フワリズミー**（c. ７８０〜c. ８４６）がいた．その著作「インドの計算法について」において，１０進法によるインド記数法の完全な説明が与えられている．また，他の著作「アル・ジャブル・ヴァル・ムカーバラ」より「algebra（代数学）」なる用語が後代のヨーロッパに出現したことはよく知られている．この書において，６種の２次方程式の解法が述べられているが，根として０も負の数も認めていない．アル・フワリズミーは略号や式を一切使用せず，終始一貫，言葉による説明を押し通すが，その説明は極めて体系的かつ徹底的なものであった．以後，この書は代数学において，幾何学におけるユークリッドの「原論」と同じような重要性をもつことになる．

アル・フワリズミー以降の大数学者として，**タービット・イブン・クッラ**（８２６〜９０１）がいる．ユークリッド，アルキメデス，アポロニオス，プトレマイオスらの著作のアラビア語への翻訳に大いに貢献した．そのほか，インドとギリシアから伝わっていた三角法を体系的な形に整理した**アブール・ワファー**（９４０年頃活躍），２次より高次の方程式を取扱った**アル・カルヒー**，物理学者としても有名な**イブヌール・ハイサム**（c. ９６５〜１０３８），詩人として非常に有名な,「ルバイヤート」の作者**オマル・ハイヤーム**(c. １０５０〜c. １１２３）などがいる．

イブヌール・ハイサム，オマル・ハイヤームおよび**ナースィル・アッディーン・アッ・トゥースィー**（１２０１〜１２７４）は，ユークリッドの「平行線の公理」を「証明」した．ナースィル・アッディーンの「証明」は１７世紀になってイギリスのジョン・ウォーリスにより翻訳され出版された．それが１８世紀に入ってから，非ユークリッド幾何学発見に至る研究の出発点となったのである．

栄光を極めたサラセン帝国も，１１世紀に入ってから衰退し始め，１２５８年にはついに滅亡，以後西アジアは，イル汗国，次いでチムール帝国の支配を受ける．アラビアの科学も衰退の一途をたどったが，アラブ世界の最後の有能な数学者として，**アル・カーシー**（１４３６年頃没）の名を挙げることができる．彼はチムール帝国のウルグ・ベグ（チムールの孫）に仕えたが，アラビア人としてはじめて１０進小数を使用した．π の近似値を小数点以下１６桁まで正しく求めている．アル・カーシーの死とともにアラビアの数学は終わりを告げることになった．

3　中世ヨーロッパの数学

５２９年，アテネのアカデメイアが閉鎖された後，ギリシアの数学が消滅してしまった訳ではなかった．何人かの学者たちが活動を続けてはいたが，その貢献のほとんどは初等的なもので，主に古典数学書の注釈であった．ビザンティン世界は，西ヨーロッパの学問的水準が高まり，東方の数学を受け入れる準備が整うまで，古典をできるだけ多く保存しておくという役割を果した．

一方，西ヨーロッパにおいては，西ローマ帝国の滅亡以来数世紀にわたり，学問は停滞を続ける．わずかに，東ゴート王国の**ボエティウス**（c. ４８０〜５２４）とその弟子**カッシオドルス**（c. ４８０〜５７５），**セビーリャのイシドロス**（c. ５６０〜６３６），イギリス人の**ビード**（６７３〜７３５）などの哲学者，数学者が現れたが，学問の水準は低かった．８世紀末から９世紀始めにかけて，フランク王国のカール大帝の時代に学問が奨励され，カロリング・ルネサンスと呼ばれた時期に，大帝が招いた**ヨークのアルクイン**（７３５〜８０４）が書いた数学の教科書などを除けば，１０世紀末にジェルベールが現れるまで，西ヨーロッパにおける数学の状況はまったく見るべきものがなかった．**ジェルベール**（９４０〜１００３）はフランスに生まれた神学者，数学者であるが，神聖ローマ帝国皇帝オットー３世に仕え，後にローマ教皇シルヴェステル２世となる．算術と幾何学についての著作があり，インド・アラビア記数法をヨーロッパに初めて教えたということである．

１２世紀に入って，ようやくヨーロッパはアラビアの文化を吸収するための準備を整えた．長い暗黒時代を経て，ついに，光は東方からやって来た．アラビア語の書物をラテン語に翻訳することから文化の輸入が始まった．１１４２年，ユークリッドの「原論」のラテン語訳が**バースのアデラード**（１０７５〜１１６０）により行われた．アデラードはイギリスの修道僧であったが，１１２０年頃，イスラム教徒に変装し，コルドバ大学の講義に出席して，ついに「原論」の写本を入手することに成功したのであった．アデラード以外に翻訳者として，**クレモナのゲラルド**（１１１４〜１１８７），**カリンティアのヘルマン**（１１４０年頃活躍）などが挙げられるが,「原論」の訳本としては，アデラードのものが最も普及した．ゲラルドは，他にプトレマイオスの「天文学大全（アルマゲスト)」，アル・フワリズミーの「代数学（アル・ジャブル・ヴァル・ムカーバラ)」など８０冊以上の翻訳を行った．これらの訳本により，当時のヨーロッパの学者た

ちは初めてアラビアの代数学と三角法を知り，熱心に研究した．

アルゴリズム（インド・アラビア記数法）が普及するために大きな影響を与えた代表的人物として，**ピサのレオナルド**（通称 **フィボナッチ**，c. １１８０〜c. １２５０）がいる．レオナルドはピサの貿易商人であったが，エジプト，シリア，ギリシア，シチリアなどに商いに出かけて行き，各地でアラビアの文化に接した．彼はアラビア商人の計算法の巧みさに驚き，やがてその計算法を会得した．レオナルドは１２０２年,「そろばんの書」を著したが，そこでアルゴリズムの使用を強く主張した．それのみならず，この書は，代数的方法を解説し，多くの応用問題を含む論文でもあるのだが，包括的な立場から，アラビアの数学をヨーロッパに紹介した最初のものであるという点に最大の価値がある．レオナルドはそのほかにいくつかの本を書いたが，高級すぎて同時代の人々に理解されなかった．

その他に，重要人物として，数字の代りに文字を使用した**ヨルダヌス・ネモラリウス**（１３世紀半ば頃活躍）,「原論」の権威あるラテン語訳をつくった**ヨハネス・カンパヌス**（１２６０年頃活躍）アルキメデスの論文をラテン語に翻訳した**メールベクのギョーム**（c. １２１５〜c. １２８６），イギリスの神学者，哲学者，数学者**トマス・ブラッドワーディーン**（c. １２９０〜１３４９），フランスの数学者で司教の**ニコル・オレーム**（c. １３２３〜１３８２）などが挙げられる．

数学だけでなく，１２世紀から１３世紀にかけて，スコラ学の推進，俗語文学や叙事詩など文学の発展，医学や科学の進歩，ゴシック建築の始まりなどヨーロッパ各地で文化活動が活発に行われた．各地に大学が続々と創設されていったのもこの時期のことである．この時代は**「１２世紀ルネサンス」**と呼ばれているが，後に到来する「ルネサンス」への道を準備した時代として重要な意味をもっている．

4　ルネサンスの数学

通常，ルネサンスは，１４世紀の始めフィレンツェにおいて古典文学復興を目指して起こった運動をもって，その嚆矢とするといわれている．しかし，数学のルネサンスはかなり趣を異にする．まず，数学のルネサンスは芸術の分野のルネサンスとは違って，活動の開始が大幅に遅れた．１４世紀は前世紀に続く古典の翻訳，中世における数学の追従に終始し，ようやく１５世紀半ば頃になって積極的な活動が見られるのである．それは，１２〜１３世紀に，ユークリッド，アポロニオス，アルキメデス，プトレマイオスらの著作の翻訳がさかんに行われたけれども，当時の人々にはそれらは極めて難解であり，十分に理解する数学的能力の持主はほとんどいなかったからである．また，その頃の大学教育にも問題があった．当時の大学においては，神学，哲学，法学，医学が中心分野であって，数学や自然科学は「一般教育科目」として軽視されており，１５世紀半ば頃でも，学士の称号を得るために算術を超える数学の知識は必要とされていなかったのである．

数学のルネサンスは，まずドイツで始まり，やがてイタリアに移行した．そのいきさつは次の通りである．数学の発展は商業の発達に直接的に結びついていたため，数学は商業の盛んな都市において活発であった．ドイツにおいてはニュルンベルクなどがそのような都市の代表であり，また，昔からコンスタンティノープルよりバルカン諸国を経てウィーンに至る商業ルートが確立していたため，ギリシアの文献のドイツへの流入も比較的容易であった．さらに，１５世紀半ば以降はドイツ人**グーテンベルク**の発明による印刷術が普及し始め，やがてニュルンベルクは印刷業の中心地となり，科学，芸術の一大拠点となっていった．このような種々の理由から，ドイツは，１５世紀には数学の水準の高さでイタリアに劣らぬ存在となっていたのである．

ルネサンスの数学の内容的な特色を挙げれば，アルゴリズムの使用により，商業用算術が進歩したこと，代数学と三角法が発達し，幾何学の発展はほとんど見られないこと，負の数が認められていないこと，記号と文字の使用が始まったこと，などである．

１５世紀における代表的人物を挙げると，まず，後に枢機卿となった神学者，哲学者，数学者の**ニコラウス・クザーヌス**（１４０１〜１４６４），ニュルンベルクで活躍した数学者，天文学者**レギオモンタヌス**（本名 **ケーニヒスベルクのヨハン・ミュラー**，１４３６〜１４７６）である．レギオモンタヌスは幅広く多様な分野に関心をもち，１５世紀最大の数学者といわれている．プトレマイオスの「天文学大全」のラテン語新訳を完成させ，自身も「三角法のすべて」を著した．これは「三角法」を数学の一分野として「天文学」より独立させた重要な意味をもつ著作である．ルネサンス初期の数学者のほとんどはドイツ人，イタリア人だったが，例外として，フランスの**ニコラ・シュケ**（１５００年頃活躍）がいる．ピサのレオナル

ドの「そろばんの書」以来最もすぐれた論文といわれる「数の科学における三部分」を書いた．イタリアの**ルカ・パチオーリ**（１４４５〜１５１４）の存在も大きい．１４９４年,「算術，幾何，比および比例大全」をイタリアで出版した．これは平易な日常語で書かれてあり，独創性はあまりないが，それまでの多数の資料をみごとに集大成したものであって，その後に大きな影響力をもった．ライプツィヒの**ヨハン・ヴィドマン**（生年１４６０年頃）は１４８９年「商業用算術書」を出版した．これは記号“＋”と“－”が印刷された最古のものである．

１６世紀前半はドイツの代数学が活況を呈した時期であった．**アダム・リーゼ**（１４９２〜１５５７）は，古い計算法（ローマ数字とそろばんを使う）から新しい計算法（インド・アラビア数字とペンを使う）への移行に関して最も大きな影響力を与えたドイツの数学者である．**クリストフ・ルドルフ**（c. １５００〜c. １５４５）の著作「未知数」は根号$\sqrt{\ }$と１０進小数を使用した最初の印刷本である．**ミヒャエル・シュティーフェル**（１４８７〜１５６７）の「算術全書」（１５４４）は１６世紀のドイツの代数学書の中で最も重要なものである．負の数，べき根，べき乗の取り扱い方が革新的なのである．完全に一般的にはなっていないが，２次方程式の係数として負の数を取り入れて，解法を一つの形式に整理した．１６世紀に純粋幾何学の学者が全くいなかった訳ではなく,「円錐曲線の原理」を書いた**ヨハンネス・ヴェルナー**（１４６８〜１５２２），画家として非常に有名な**アルブレヒト・デューラー**（１４７１〜１５２８）がいる．そのほか，地動説を初めて説えたポーランドの**ニコラウス・コペルニクス**（１４７３〜１５４３）は天文学者とみなされているが，同時にすぐれた三角法学者でもあり，数学においても多くの貢献をしているのである．コペルニクスは，有名な著書「天球の回転について」が出版されたのが彼の没年であったため，迫害を受けることはなかったが，この頃から反動宗教改革運動が激しくなり，ルネサンスの活動に大きな影響を与えるのである．しかし，純粋数学は，その学問の性質上，宗教裁判のような反動宗教改革の影響を受けることはなかった．これはルネサンスの数学の特色として挙げられることであろう．

代数学は当時の数学の中心的分野であったが，３次方程式の一般的な解法を示すことは大きな課題であった．ボローニャ大学の数学教授であった**シピオーネ・デル・フェッロ**（１４６５〜１５２６）は，１５２５年頃には，$x^3+px=q$ (p,q は正の数) なる形の３次方程式の一般解法を発見していたが，公表はしなかった．この頃から３次方程式の解法をめぐっていろいろなドラマがくりひろげられてゆく．と同時に，この頃から代数学の中心はドイツからイタリアへと移ってゆくのである．パヴィアの生まれで有名な医者，占星術師，数学者であった**ジローラモ・カルダーノ**（１５０１〜１５７６）は，１５４５年，著書「大いなる術（アルス・マグナ)」において３次および４次方程式の解法を述べた．しかし，カルダーノはその最初の発見者ではなかった．３次方程式の一般解法はヴェネツィアの数学者**タルタリア**（本名　**ニコロ・フォンタナ**，１５００〜１５５７）がフェッロよりは後に，しかし独立に発見していたのであるが，カルダーノの懇望に負けて公表しないことを条件に解法を教えていたのである．けれども，カルダーノはその著書において３次方程式についてはタルタリアから得たことを明言し，４次方程式の解法の最初の発見者は，弟子の**ロドヴィーコ・フェッラーリ**（１５２２〜１５６５）であると述べている．

３次方程式は簡単な変換によって２次の項を消すことができるので，その一般形を $x^3+px+q=0$ としてよい．カルダーノの時代には負の数を認めていなかったので，一般形は p,q を正の数として，$x^3+px=q$, $x^3=px+q$, $x^3+q=px$ のように三種類に分けて考え，それぞれについて一般解法を示さねばならないという，今考えれば実に馬鹿々々しい不便さがあった．カルダーノが述べた解法を，現代風に改良して説明してみたい．p,q は０でない実数（負でもよい）として，$x^3+px+q=0$ を解いてみる．$x=u+v$ とおくと，$(u+v)^3+p(u+v)+q=0$，これを展開し，変形して，$(u^3+v^3+q)+(3uv+p)(u+v)=0$ を得る．よって，

$$u^3+v^3=-q \tag{1}$$

$$3uv=-p \tag{2}$$

をみたす u,v を求めれば，$x=u+v$ が求める解である．(2) より，

$$u^3v^3=-\frac{p^3}{27} \tag{3}$$

であるから，(1) と (3) をみたす u^3,v^3 は２次方程式 $t^2+qt-\dfrac{p^3}{27}=0$ の２解である．ゆえに u^3,v^3 の値は $\dfrac{1}{2}\left(-q\pm\sqrt{q^2+\dfrac{4}{27}p^3}\right)$ で与えられる．そこで，$u_1^3=\dfrac{1}{2}\left(-q+\sqrt{q^2+\dfrac{4}{27}p^3}\right)$ をみたす u_1 の値を一つ定

める．$v_1=-\dfrac{p}{3u_1}$ とおけば，$v_1^3=\dfrac{1}{2}\left(-q-\sqrt{q^2+\dfrac{4}{27}p^3}\right)$ となり，$u=u_1, v=v_1$ は (1) と (2) をみたす．いま，$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とおく．すなわち，ω は１の原始３乗根である．このとき，$u=\omega u_1, v=\omega^2 v_1$ および $u=\omega^2 u_1, v=\omega v_1$ は２組とも (1) と (2) をみたす．ゆえに，３つの解

$$x=u_1+v_1,\quad \omega u_1+\omega^2 v_1,\quad \omega^2 u_1+\omega v_1 \tag{4}$$

が得られた．

次に，フェッラーリによる４次方程式の解法を述べよう．簡単な変換により，３次の項を消すことができるので，一般の４次方程式を $x^4+ax^2+bx+c=0$ としてもよい．しかも，$b\neq 0$ としてもよい．$x^4=-ax^2-bx-c$ の両辺に $tx^2+\dfrac{t^2}{4}$ (t は後で定める定数) を加えれば，

$$\left(x^2+\frac{t}{2}\right)^2=(t-a)x^2-bx+\frac{t^2}{4}-c \tag{5}$$

右辺が完全平方式であるための条件は

$$\begin{aligned} b^2-4(t-a)\left(\frac{t^2}{4}-c\right)&=0\\ \textit{i.e.},\ t^3-at^2-4ct+4ac-b^2&=0 \end{aligned} \tag{6}$$

であるが，(6) は３次方程式だから解くことができる．(6) の $t_1>a$ なる実根を t_1 とするとき，(5) において $t=t_1$ とおけば，

$$x^2+\frac{t_1}{2}=\pm\sqrt{t_1-a}\left\{x-\frac{b}{2(t_1-a)}\right\}$$

が得られる．これで，x についての２つの２次方程式が得られたので，４根を求めることができる．

いま，３次方程式 $x^3-15x-4=0$ を考える．これは実根 $x=4$ をもつ．前述のカルダーノの根の公式 (4) を用いると，根の１つとして

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} \tag{7}$$

を得るが，この式の $\sqrt[3]{}$ の中の数は虚数であるから，この表現 (7) は極めて具合の悪いものである．しかも，実根 $x=4$ も根の公式 (4) により表現されなければならない．複素数が認められていない当時としては，これは全く理解困難な状況であった．ボローニャ生まれの数学者**ラファエル・ボンベッリ**（１５２６～１５７２）は

$$2\pm\sqrt{-121}=(2\pm\sqrt{-1})^3\quad \textit{i.e.},\quad \sqrt[3]{2\pm\sqrt{-121}}=2\pm\sqrt{-1}$$

を発見し，根として (7) より，

$$x=(2+\sqrt{-1})+(2-\sqrt{-1})=4$$

が得られることを知って非常に喜んだ．このように，３次方程式を解くときに，実根のみをもつ場合でも，虚数の知識が必要なことが明らかになって，これが複素数の認知を促進する大きな要因となったのである．

最後に，ルネサンス末期における最大の数学者**フランソワ・ヴィエート**（１５４０～１６０３）について述べる．ヴィエートはフランスのフォントネ・ル・コントに生まれた．本職は法律家，政治家であり，数学は余技であった．数学の歴史において非常に重要な著作である「解析術序説」を１５９１年に書いている．この書において彼は未知量だけでなく既知量に対しても文字を使用しており，また，記号も用いているが，言語の省略形が多い．ヴィエートはこの書の中で３次方程式の新解法を述べている．３次方程式を一般に $x^3+3ax+b=0$ $(a\neq 0)$ としてもよい．ここで，$y^2+xy=a$ すなわち，$x=\dfrac{a-y^2}{y}$ と置き換えると

$$\begin{aligned} \left(\frac{a-y^2}{y}\right)^3+3a\frac{a-y^2}{y}+b&=0,\\ (a-y^2)^3+3ay^2(a-y^2)+by^3&=0, \end{aligned}$$

展開して整理すると，

$$y^6 - by^3 - a^3 = 0.$$

これは y^3 についての２次方程式だから解ける．ゆえに，最初の３次方程式が解ける．ヴィエートは三角法においても普遍的で広い視野をもっていた．６種の三角関数すべてに対して，分刻みの関数表を作成している．また，彼はｎ倍角の公式を示している．さらに，彼は３倍角の公式を利用して，３次方程式を解く方法を説明している．方程式 $x^3 + 3ax + b = 0$ において，$mx = y$ とおくと，$y^3 + 3m^2ay + m^3b = 0$ が得られる．$y = \cos\theta$ とおき，３倍角の公式 $\cos^3\theta - \frac{3}{4}\cos\theta - \frac{1}{4}\cos 3\theta = 0$ と比較して，$3m^2a = -\frac{3}{4}$ かつ $m^3b = -\frac{1}{4}\cos 3\theta$ が得られる．第１式より m の値を求めると，第２式より θ が求められ，よって $y = \cos\theta$ が求められる．ゆえに $x = \frac{y}{m}$ より，求める根が得られる．

5　結び

B.C. ２０００年頃，バビロニア人は２次方程式の一般解法を知っていた．また，ある特殊な３次方程式を解いた記録も残っている．それから実に約３５００年もの間，一般の３次方程式を解くことはできなかった．それは代数学において重要な課題であったが，ルネサンス末期になって，ついにそれをイタリアの数学者たちが解決した．３次のみならず４次方程式の解法まで一気にかたづけてしまったのである．３次および４次方程式の解法の発見は，代数学におけるルネサンスの数学の最大の貢献である．それは代数学に強い刺激を与え，次の２～３世紀の数学の流れを大きく変えることになった．

まず，５次以上の方程式については，フェッロが３次方程式の解法を示してから約３００年の歳月が過ぎて，弱冠１９歳，ノルウェー出身のニールス・ヘンリク・アーベル（１８０２～１８２９）が，これを解決した．５次以上の方程式の一般解法は不可能であるという，誰も予想し得なかった驚くべき結果であった．さらに，この分野はガロアの理論へと発展して行き，抽象代数学などの専門領域を生み，連綿として今日までその流れが続いている．一方，３次方程式の解法がもたらした１つの直接的な成果は，新しく出現した数 –虚数であった．虚数すなわち複素数は，後に歴とした「数」として公認され，やがてガウスやコーシーなどの大家により創始された，複素数の世界における解析学の源流は，とうとうたる大河となって流れて行った．

《付録》 ルネサンス期（１３００～１６００）の重要な出来事

*c.*１３００	フィレンツェの画家チマブーエ死す.
１３００～８	ダンテの「神曲」（地獄編）成る.
１３０９	ローマ教皇のアヴィニョン在位（教皇のバビロン幽囚）.
１３３８	英仏間の百年戦争始まる.
１３４７～５１	全ヨーロッパにペスト大流行. 人口激減.
１３５３	オスマン・トルコのヨーロッパ侵入始まる.
１３７８	ヴェネツィア，ジェノヴァを破る.
１３７８	教会の大分離（～１４１７）.
１３８９	ヴェネツィア，北イタリアに領土拡張（～１４５４）.
１３９４	東ローマ帝国使節クリソローラス，ヴェネツィアを訪問，その後フィレンツェに赴く.
１４０２	ミラノ公ジャン・ガレアッツォ・ヴィスコンティ死に領地四散す.
１４１７	教皇のローマ復帰（マルティヌス５世），教皇の教会領の支配力強まる.
１４３４	コシモ・デ・メディチのフィレンツェ支配（３０年）始まる.
１４５０	フランチェスコ・スフォルツァ，ミラノを征服，ミラノ公となる.
*c.*１４５０	グーテンベルク，印刷技術を発明，それに続く出版業の繁栄.
１４５３	東ローマ帝国滅亡，多数のギリシア人学者，コンスタンティノープルよりイタリアへ逃れる.
１４５４	ローディの平和条約. イタリア諸国家に一時的な平和.
１４５５	英国ばら戦争（～１４８５）.
１４６３	ヴェネツィア，トルコと交戦（～１４７９）.
１４６９	ロレンツォ・デ・メディチのフィレンツェ支配始まる.
１４７９	ロドヴィーコ・スフォルツァ，ミラノ公となる（～１４９９）.
１４９２	グラナダ王国滅亡，スペインの統一成る（１／２）.
	ロレンツィオ・デ・メディチ死す（４／９）.
	クリストファー・コロンブス，西インド諸島に到達（８／３），以後大航海時代に入る.
	ロドリーゴ・ボルジア，ローマ教皇となる（８／１１）.
１４９４	イタリア戦争始まる. フランス王シャルル８世のイタリア遠征 (フィレンツェ入城).
	修道士サヴォナローラ，メディチ家に代わり，フィレンツェ市政を浄化（１４９８刑死）.
１５００	ローマ教会，キリスト生誕１５００年祭催行，免罪符発売.
１５０４	スペイン，ナポリ王国を征服.
１５１７	マルティン・ルターの宗教革命.
１５２１	ドイツ・フランス間のイタリア戦争始まる（～１５４４）.
１５２７	ドイツ軍によるローマ劫略.
１５３５	スペイン，ミラノを支配.
１５４０	ローマ教会，イエズス会を公認，反動宗教改革始まる.
１５４３	ニコラウス・コペルニクス，地動説を発表.
１５５５	アウグスブルクの宗教和議（ルター派の自由公認）.
１５６２	ユグノー戦争始まる（～１５９８）.
１５７１	レパントの海戦，連合軍，トルコを破る.
１５８８	スペイン無敵艦隊，イギリス海軍に敗る.
１５９８	ナント勅令発布（フランスの信教の自由確立）.
１６００	ジョルダーノ・ブルーノ刑死.